Universidad Simón Bolivar
Departamento de Matemáticas
Puras y Aplicadas

Matemáticas III (MA-1116)
1^{er} Examen Parcial (35 %)
Abr-Jul 2009
Tipo A

JUSTIFIQUE TODAS SUS RESPUESTAS

1. (10 pts.) Dado el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 = 3 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + ax_4 = b \\ x_2 - x_3 + x_4 = 3 \\ (1-a+b)x_4 = 2-b \end{cases}$$

Encuentre los valores de a y b para el cual el sistema

(a) Tiene solución única.
(b) Es inconsistente.
(c) Tiene infinitas soluciones.

2. (10 pts.) Encuentre los valores de a, para que la siguiente matriz sea invertible

$$A = \begin{pmatrix} -a & a-1 & a+1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2-a & a+3 & a+7 \end{pmatrix}$$

3. (10 pts.) Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

(a) Calcule la inversa de A utilizando el método de Gauss-Jordan.
(b) Encuentre el determinante de A.
(c) Encuentre el valor del cofactor A_{23}.

4. (5 pts.) Sea A una matriz simétrica tal que $det(A) \neq 0$. Demustre que A^{-1} es una matriz simétrica.

1. (10 pts.) Dado el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 = 3 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + ax_4 = b \\ x_2 - x_3 + x_4 = 3 \\ (1-a+b)x_4 = 2-b \end{cases}$$

Encuentre los valores de a y b para el cual el sistema

(a) Tiene solución única.

(b) Es inconsistente.

(c) Tiene infinitas soluciones.

Solución. Tenemos las siguientes matrices asociadas al sistema:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 & a \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & (1-a+b) \end{pmatrix} ; \; \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} ; \; \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ b \\ 3 \\ 2-b \end{pmatrix}$$

Resolvemos el problema reduciendo la matriz ampliada $(A \mid \boldsymbol{b})$ hasta obtener lo mas cercano a la forma escalonada mediante operaciones elementales por filas.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & a & b \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & (1-a+b) & 2-b \end{array}\right) \sim . \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{a}{4}+1 & b-\frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{(1-a+b)} & 2-b \end{array}\right)$$

A partir de acá, analizamos el elemento $a_{44} = (1-a+b)$, de donde obtenemos dos casos relevantes:

- Si $1-a+b \neq 0$, la matriz asociada al sistema nos queda:

$$F_3 \to \left(\frac{1}{1-a+b}\right) F_3 \Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{a}{4}+1 & b-\frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{2-b}{1-a+b} \end{array}\right)$$

  De donde se obtendría que el sistema asociado posee solución única, ya que la matriz está en su forma escalonada y no hay variables libres.

- Si $1-a+b = 0$, la matriz asociada al sistema nos queda:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{a}{4}+1 & b-\frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2-b \end{array}\right)$$

De donde, si $b = 2$, la matriz asociada nos quedaría:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & \dfrac{a}{4}+1 & 2-\dfrac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

que, debido a la cuarta fila, posee una variable libre (x_4), generando infinitas soluciones para el sistema.

Pero, si $b \neq 2$, se presenta una inconsistencia en la cuarta ecuación y por ende, para el sistema en general.

Finalmente, concluimos que:

(a) El sistema posee solución única para $a, b \in \mathbb{R} : 1 - a + b \neq 0$.

(b) El sistema es inconsistente para $a, b \in \mathbb{R} : 1 - a + b = 0 \wedge b \neq 2$.

(c) El sistema posee infinitas soluciones para $a = 3$ y $b = 2$.

2. (10 pts.) Encuentre los valores de a, para que la siguiente matriz sea invertible

$$A = \begin{pmatrix} -a & a-1 & a+1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2-a & a+3 & a+7 \end{pmatrix}$$

Solución. Por definición, si A (una matriz $n \times n$) es invertible, su determinante es no nulo, es decir:

$$det(A) = det \begin{pmatrix} -a & a-1 & a+1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2-a & a+3 & a+7 \end{pmatrix} \neq 0$$

Entonces, para resolver el problema, calculamos los valores del parámetro a para los cuales $det(A) \neq 0$. Así, a manera de simplificar los cálculos, reduciremos la matriz mediante operaciones elementales por filas y emplearemos las propiedades de los determinantes.

$$det(A) = det(A^t) = det \begin{pmatrix} -a & 1 & 2-a \\ a-1 & 2 & a+3 \\ a+1 & 3 & a+7 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[det(.)=det(A)]{F_2 \to F_2+F_1} det \begin{pmatrix} -a & 1 & 2-a \\ -1 & 3 & 5 \\ a+1 & 3 & a+7 \end{pmatrix} \xrightarrow[det(.)=det(A)]{F_3 \to F_3+F_1} det \begin{pmatrix} -a & 1 & 2-a \\ -1 & 3 & 5 \\ 1 & 4 & 9 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[det(.)=det(A)]{F_2 \to F_2+F_3} det \begin{pmatrix} -a & 1 & 2-a \\ (7)0 & (7)1 & (7)2 \\ 1 & 4 & 9 \end{pmatrix} = (7)det \begin{pmatrix} (-1)a & 1 & 2-a \\ (-1)0 & 1 & 2 \\ (-1)(-1) & 4 & 9 \end{pmatrix}$$

$$= (-1)(7)det \begin{pmatrix} a & 1 & 2-a \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 4 & 9 \end{pmatrix} \underset{det(.)=det(.^t)}{=} (-1)(7)det \begin{pmatrix} a & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 4 \\ 2-a & 2 & 9 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[(-1)(7)det(.)=det(A)]{F_3 \to F_3+F_1} (-1)(7)det \begin{pmatrix} a & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 4 \\ 2 & 2 & 8 \end{pmatrix} = (-1)(7)(2)det \begin{pmatrix} a & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \tag{1}$$

De (1), notamos que la segunda y tecera fila son iguales, lo cual implica que $det(A) = 0$, $\forall a \in \mathbb{R}$. En este sentido, concluimos que **no existen valores de $a \in \mathbb{R}$ para que la matriz A sea invertible.**

3. (10 pts.) Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

(a) Calcule la inversa de A utilizando el método de Gauss-Jordan.

(b) Encuentre el determinante de A.

(c) Encuentre el valor del cofactor A_{23}.

Solución. A partir de la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, respondemos;

(a) Para calcular la inversa de A por el método de Gauss-Jordan, utilizamos la matriz ampliada a la identidad de orden 3 $(A \mid I_3)$ y realizamos operaciones elementales por fila hasta obtener $(I_3 \mid A^{-1})$.

$$\underbrace{\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)}_{(A \mid I_3)} \sim . \sim \underbrace{\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 4 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 2 & 1 \end{array}\right)}_{(I_3 \mid A^{-1})}$$

Así,

$$\boxed{A^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & -3 & -2 \\ 1 & -1 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}}$$

(b) Para calcular el determinante de la matriz A, realizamos un procedimiento análogo al utilizado para resolver la **pregunta 2**.

$$det(A) = det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ (-1)(-1) & (-1)0 & (-1)(-2) \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} = (-1)det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\frac{F_2 \to F_2 + F_1}{(-1)det(.) = det(A)} \; (-1)det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$; expandimos por cofactores a lo largo de F_2

$$det(A) = (-1)[(0)A_{21} + (1)A_{22} + (0)A_{23}] = (-1)(-1)^{2+2} det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = -1$$

Así,

$$\boxed{det(A) = -1}$$

(c) En general,

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} det(M_{ij});$$

Con M_{ij} una matriz $(n-1) \times (n-1)$ que resulta tras cubir la i-ésima fila y la j-ésima columna de A.

En particular,

$$A_{32} = (-1)^{3+2} det(M_{32}) = (-1)^5 det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = (-1)(2-2) = 0$$

Así,

$$\boxed{A_{32} = 0}$$

4. (5 pts.) Sea A una matriz simétrica tal que $det(A) \neq 0$. Demustre que A^{-1} es una matriz simétrica.

Solución. Por definición, una matriz simétrica cumple con la característica:

$$A = A^t \tag{2}$$

Como $det(A) \neq 0$, A^{-1} existe y podemos multiplicarla (convenientemente, por la izquierda) en ambos lados de (2);

$$(A^{-1})A = (A^{-1})A^t \Rightarrow I_n = A^{-1}A^t \tag{3}$$

Además, como A es invertible, también existe $(A^t)^{-1}$, por tanto, podemos realizar algo similiar a lo anterior (para este caso, multiplicamos $(A^t)^{-1}$ por la derecha en (3));

$$I_n(A^t)^{-1} = A^{-1}A^t(A^t)^{-1} \Rightarrow (A^t)^{-1} = A^{-1}$$

De donde, por propiedades de la transpuesta,

$$(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t \Rightarrow A^{-1} = (A^{-1})^t$$

Así, como A^{-1} cumple con la característica de ser igual a su transpuesta, concluimos que es simétrica, lo que queríamos demostrar.

Este examen fue resuelto y digitalizado en $\LaTeX$ por **Alvaro Quintana** para **GECOUSB**

Alvaro Quintana
20-10519
Ing. Electrónica
quintanaalvaro55@gmail.com

gecousb.com.ve

Cualquier error de tipeo o resolución, notificar a **quintanaalvaro55@gmail.com**